ANALYSIS II

Dr. Daniel Pitteloud

Themen:

0. Stetigkeit (Ergänzungen)
1. Integralrechnung
2. Mehrdimensionale Analysis (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).

0. Stetigkeit (Ergänzungen)

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$.

i) D heisst offen falls $\forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0$ mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq D$.

ii) D heisst abgeschlossen falls $\mathbb{R} \setminus D$ offen ist.

iii) D heisst kompakt falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiele: $D_1 = [0, \infty[$ ist abgeschlossen, nicht kompakt.

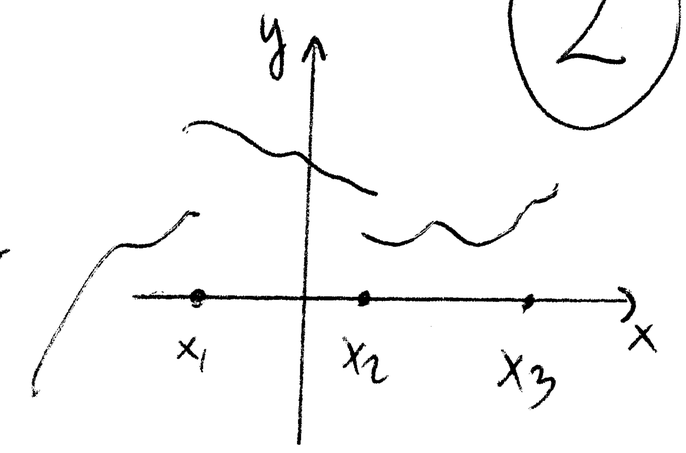
$D_2 = [a, b]$ ist kompakt $(a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b)$

$D_3 = [0, \frac{1}{2}[\cup \mathbb{Z}$ ist nicht abgeschlossen (und nicht kompakt)

Def: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.
f heisst stückweise stetig falls es endlich viele Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ aus I gibt, sodass

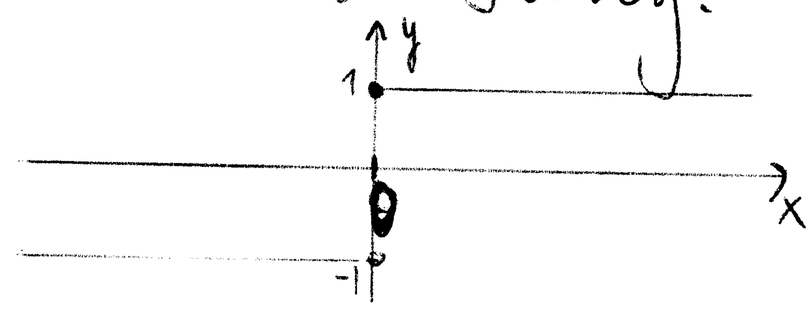
i) f ist stetig in jedem Punkt $x \in I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$

ii) $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x)$ existieren $(1 \leq k \leq n)$.



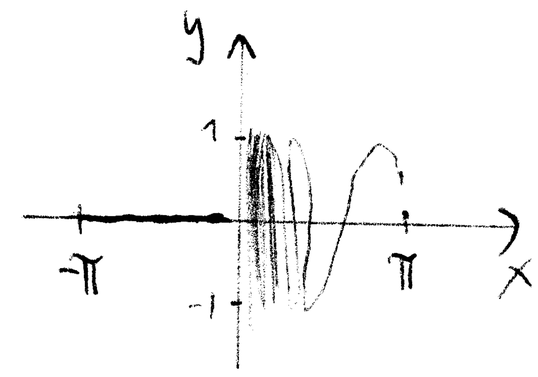
Beispiele: a) Jede stetige $f: I \to \mathbb{R}$ ist stückweise stetig.

b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{"} \ x < 0. \end{cases}$



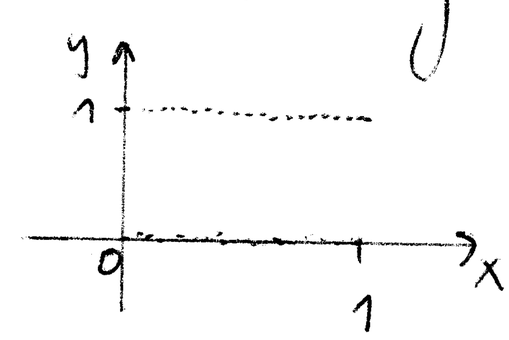
f ist stückweise stetig (aber nicht stetig).

c) Sei $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{"} \ -\pi \leq x < 0. \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existiert nicht $\Rightarrow$ f ist nicht stückweise stetig.

d) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$



f ist in jedem Punkt $x \in [0,1]$ unstetig [$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}$] $\Rightarrow$ f ist nicht stückweise stetig.

Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.

Def: a) f heißt stetig in $x_0 \in I$ falls
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ sodass $\forall x \in I \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

b) f heißt stetig falls f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

c) f heisst gleichmässig stetig falls

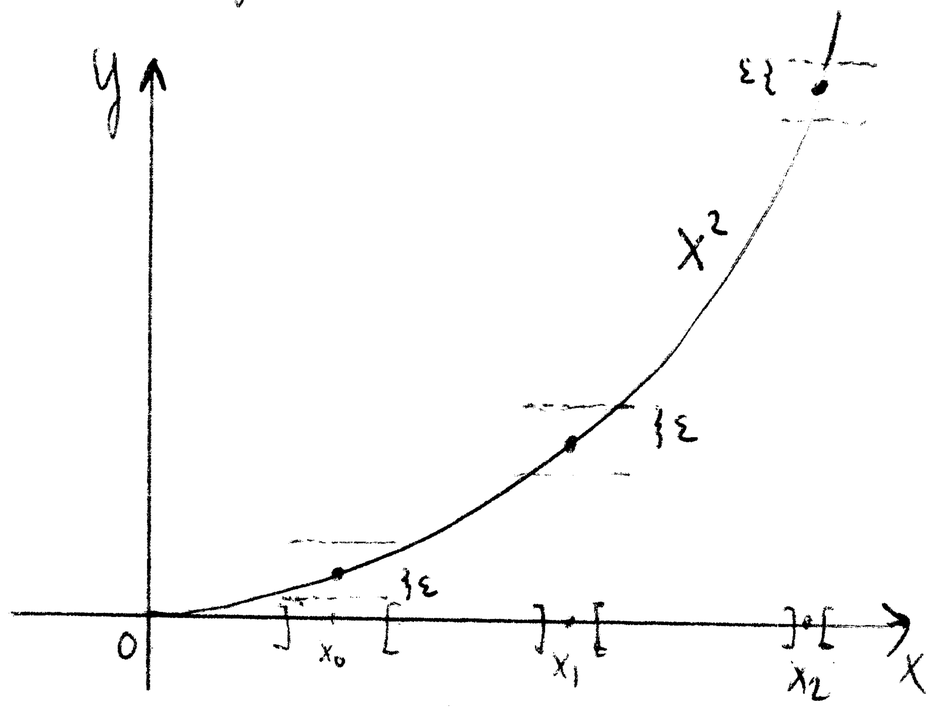
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass $\forall x, x_0 \in I\ \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$.

3

Bem: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

In a): $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. In c): $\delta = \delta(\varepsilon)$, d.h. δ hängt nicht von x_0 ab.

Beispiele: a) $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



Wir zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Ang. f ist gleichm. stetig. Sei $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ sodass

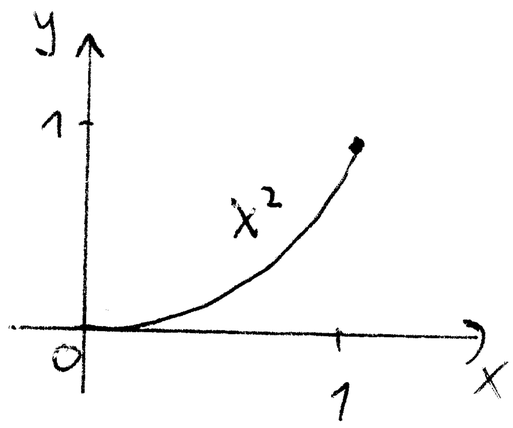
$\forall x, x_0 \geq 0$ gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < 1$.

Sei $x := x_0 + \delta/2$. $|x - x_0| = \delta/2 < \delta \Rightarrow |(x_0 + \delta/2)^2 - x_0^2| < 1 \Rightarrow 2x_0\delta + \delta^2/4 < 1$

$\forall x_0 \geq 0$. Widerspruch für $x_0 = 1/\delta$: $\left[2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \delta + \delta^2/4 > 2\right]$.

Also ist f nicht gleichmässig stetig.

b) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

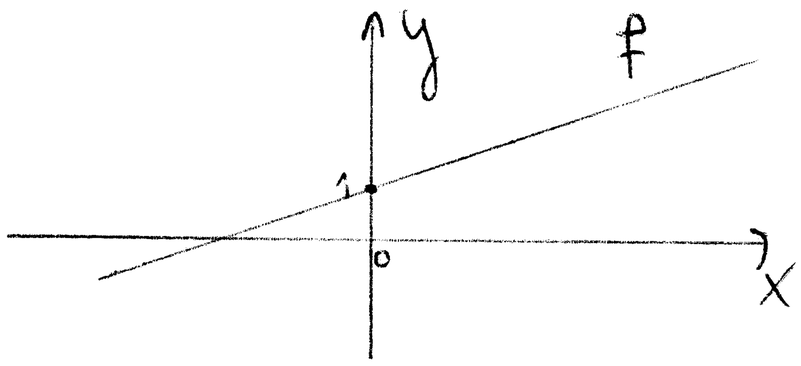


Seien $x, x_0 \in [0,1]$. $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| =$

$|x - x_0| \cdot |x + x_0| = |x - x_0|(x + x_0) \leq 2|x - x_0|$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\delta := \varepsilon/2$ leistet das Gewünschte. f ist gleichmäßig stetig.

c) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$.



Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$. $|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{3}x + 1 - \left(\frac{1}{3}x_0 + 1\right)\right|$

$= \frac{1}{3}|x - x_0|$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\delta := 3\varepsilon$ funktioniert. f gleichm. stetig.

d) Jede gleichmäßige stetige Funktion ist stetig.

4

<u>Satz 0</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: Ang, f ist nicht gleichmäßig stetig. D.h:

$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,x_0\in[a,b]$ mit $|x-x_0|<\delta$ und $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$. (1)

Sei $\varepsilon>0$ wie in (1), ε fest. Für $n\in\mathbb{N}^*$ und $\delta=1/n$ seien $x_n,x_n'\in[a,b]$

mit $|x_n-x_n'|\overset{(2)}{<}1/n$ und $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon$. $x_n\in[a,b]\ \forall n\in\mathbb{N}^* \overset{\text{Lem 5.16b), Ana I}}{\Longrightarrow}$

es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[a,b]$.

Aus (2) folgt $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}=c$ $\left[|x_{n_k}-x'_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\ \forall k\in\mathbb{N}\right]$.

f stetig in $c \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left(f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})\right)=f(c)-f(c)=0$. Widerspruch

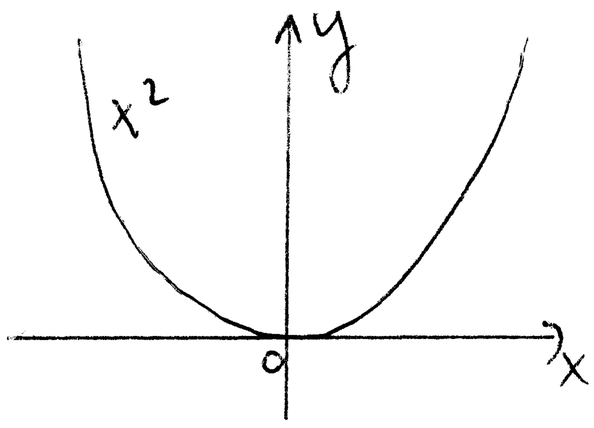
mit $|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geq\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}$. Also ist f gleichm. stetig. D

<u>Bem</u>: Die Kompaktheit des Intervalls im Satz 0 ist notwendig:

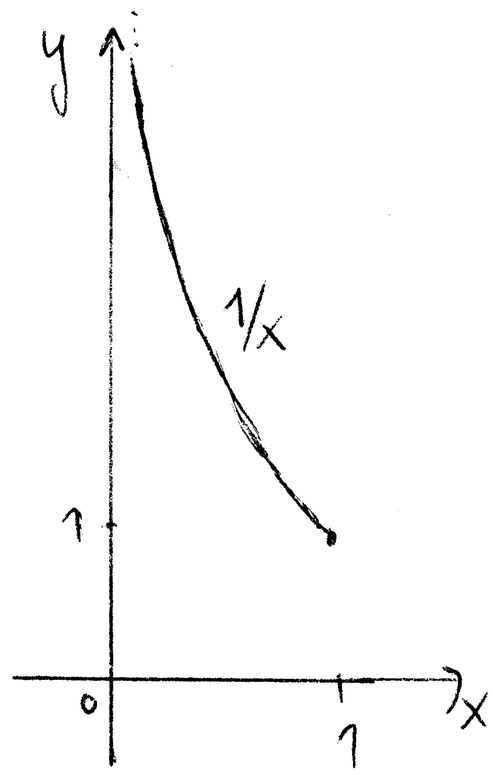
<u>Beispiele</u>: i) I unbeschränkt.

Sei $I=\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

f ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig.



ii) I beschränkt.

Sei $I=]0,1]$ und $f:]0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$

f ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig.